Partiel de Probabilités

Mardi 13 Novembre 2001, 8h00-10h00

Partiel sans documents et sans calculatrice (une feuille manuscrite A4 est autorisée)
Les trois exercices sont indépendants

On rappelle que $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$ et que si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, $U = \sum_{i=1}^n X_k^2$ suit une loi du chi-deux à n degrés de liberté (i.e. $U \sim \chi_n^2$). On conseille de définir avec soin les domaines de définition des lois continues et discrètes rencontrées dans cet examen.

Exercice 1

On considère la fonction $f(x,y)$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{8}\left(y^2 - x^2\right) e^{-y} \mathbb{I}_D(x,y)$$

où $\mathbb{I}_D(x,y)$ est la fonction indicatrice de D ($\mathbb{I}_D(x,y) = 1$ si $(x,y) \in D$ et $\mathbb{I}_D(x,y) = 0$ si $(x,y) \notin D$) avec $D = \{(x,y) \mid -y \leq x \leq y \text{ et } y > 0\}$.

1) Déterminer les lois marginales du couple (X,Y). Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2) Montrer que la covariance du couple (X,Y) notée $\mathrm{cov}(X,Y)$ est nulle (avec un peu de réflexion, on peut éviter de faire de lourds calculs). Commentez ce résultat.

3) Montrer que les variables aléatoires $S = X + Y$ et $U = Y - X$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 2

On considère une urne constituée de $N > 1$ boules numérotées de 1 à N. On tire deux boules sans remise dans cette urne. On note X_1 le numéro de la première boule et X_2 le numéro de la seconde boule.

1) Montrer que X_1, X_2 et (X_1, X_2) suivent des lois uniformes sur des domaines que l'on précisera.

2) Déterminer la covariance entre X_1 et X_2. On rappelle que :

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$

Le but de cet exercice est de déterminer la loi de $Q = {}^tYAY$, lorsque A est une matrice symétrique réelle vérifiant $A^2 = A$ et Y suit une loi normale à n dimensions $N_n(0, I_n)$, I_n étant la matrice identité d'ordre n.

1) Soit P la matrice orthogonale (${}^tP = P^{-1}$) des vecteurs propres de A et Λ la matrice diagonale des valeurs propres λ_i de A telle que $A = {}^tP\Lambda P$. On pose $Z = (Z_1, ..., Z_n) = PY$. Montrer que

$$Q = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Z_k^2$$

2) Déterminer la loi de Z. Les variables aléatoires Z_k sont-elles indépendantes ?

3) Déterminer la fonction caractéristique de Z_k^2 puis celle de Q.

4) Soit λ une valeur propre de A $(= A^2)$. Montrer que les seules valeurs possibles de λ sont $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$. En déduire que

$$E\left[e^{itQ}\right] = \frac{1}{(1-2it)^{K/2}}$$

K étant l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda = 1$. Donner alors la loi de Q.

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

m : moyenne $\boldsymbol{\sigma}^2$: variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	**m**	$\boldsymbol{\sigma}^2$	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in \left]a, b\right[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $N(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t \rvert}$
Bêta	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in \left]0, 1\right[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)