Examen Jeudi 18 Novembre 1999

Exercice 1

1) Les lois marginales de X et de Y se déduisent de la loi du couple par intégration. En faisant attention aux domaines d'intégration, on obtient :

$$f(x,.) = e^{-x} I_{R^+}(x) \text{ et } f(.,y) = y e^{-y} I_{R^+}(y)$$

où $I_A(x)$ est la fonction indicatrice de ensemble A au point x soit :

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On vérifie aisément que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,.)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(.,y.)dy = 1$.

2) $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$. En utilisant la fonction gamma pour éviter les intégrations par parties, on obtient $E[X] = 1$ et $E[Y] = 2$. Le calcul de $E[XY]$ se fait à l'aide d'une intégrale double :

$$E[XY] = \int_0^{\infty} \left[\int_x^{\infty} xye^{-y} dy \right] dx = 3$$

3) Puisque $Cov(X,Y) = 1 \neq 0$, les v.a. X et Y ne sont pas indépendantes. On peut le vérifier en remarquant que l'intervalle de définition du couple (X,Y) n'est pas un pavé ou en vérifiant que $f(x,y) \neq f(x,.)f(.,y)$.

4) La méthode la plus simple pour trouver la loi de $Z = X + Y$ est d'introduire une v.a. intermédiaire $T = X$. On calcule la loi du couple (Z,T) en faisant attention à son domaine de définition. On trouve :

$$h(z,t) = e^{-z+t} I_D(z,t) \text{ avec } D = \{(z,t) \ / \ 0 \leq t \leq z/2\}$$

En intégrant cette densité, on trouve la loi marginale de Z :

$$h(z,.) = (e^{-z/2} - e^{-z}) I_{R^+}(z)$$

On vérifie aisément que $\int_{-\infty}^{\infty} h(z,.)dz = 1$.

Exercice 2

1) On fait le changement de variables des coordonnées polaires

$$\begin{cases} X = R\cos\Theta \\ Y = R\sin\Theta \end{cases}$$

qui est bijectif de $\mathbb{R}^{2*}$ dans $\mathbb{R}^{+*} \times [0, 2\pi[$ et on trouve aisément

$$f(r,\theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) I_{R^{+*} \times [0,2\pi[}(r,\theta)$$

Par intégration, on trouve les lois marginales de R et de Θ:

$$f(r,.) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) I_{R^{+*}}(r) \text{ et } f(.,\theta) = \frac{1}{2\pi} I_{[0,2\pi[}(\theta)$$

A l'aide d'une intégration par parties ou en utilisant la fonction gamma, on montre

$$E\left[R\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

Un calcul simple permet d'obtenir :

$$P\left[R \leq 1\right] = 1 - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}} \text{ et } P\left[R \leq 0.2\right] = 1 - e^{-\frac{0.02}{\sigma^2}}$$

2) La loi de $\frac{X}{\sigma}$ est la loi normale centré réduite i.e. $\frac{X}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$. On a alors :

$$\begin{aligned} q &= P\left[\left\{-\frac{1}{\sigma} \leq \frac{X}{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma}\right\} \cap \left\{-\frac{1}{\sigma} \leq \frac{Y}{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma}\right\}\right] \\ &= \left[F\left(\frac{1}{\sigma}\right) - F\left(-\frac{1}{\sigma}\right)\right]^2 \end{aligned}$$

Pour $\sigma = 1/2$, les tables donnent $F(2) = 0.9772$ d'où $q = (2 \times 0.9772 - 1)^2 \sim 0.91$.

3) a) L'événement "la flèche n'atteint pas le carton" est l'évènement contraire de "la flèche atteint le carton" c'est-à-dire l'évènement contraire de $\{-1 \leq X \leq 1\} \cap \{-1 \leq Y \leq 1\}$. On en déduit $p = 1 - q$.

b) On a $n = 100$ expériences identiques et indépendantes pour lesquelles l'échec est "la flèche atteint le carton" et le succès "la flèche n'atteint pas le carton". N suit donc une loi Binomiale de paramètres $n = 100$ et p soit $N \sim B\left(100, p\right)$. On a classiquement $E\left[N\right] = 100p$.

c) L est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tandis que $K = L - 1$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. $L = l$ signifie que les $l - 1$ premières flèches sont perdues et que la $l^{ème}$ est dans le carton. En utilisant l'indépendance des tirs, on a :

$$P\left[L = l\right] = q^{l-1}p \qquad l \in \mathbb{N}^*$$

Par simple changement de variables, on en déduit :

$$P\left[K = k\right] = q^k p \qquad k \in \mathbb{N}$$

On a alors

$$E\left[K\right] = \sum_{k=0}^{\infty} kq^k p = pq \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = pq\frac{df(q)}{dq}$$

avec $f(q) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$. D'où $E\left[K\right] = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$.

d) La probabilité d'atteindre la cible est la probabilité d'avoir $R \leq 1$ c'est-à-dire

$$P\left[R \leq 1\right] = 1 - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$$

La probabilité de tirer dans le rond central est la probabilité d'avoir $R \leq 0.2$ c'est-à-dire

$$P\left[R \leq 0.2\right] = 1 - e^{-\frac{0.02}{\sigma^2}}$$