Examen Vendredi 14 Novembre 2003

Exercice 1

1) La fonction caractéristique de X est définie par

$$\begin{aligned}
\phi_X(u) &= E\left[e^{iuX}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{iuk} P\left[X=k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} e^{iuk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{iu}\right)^k}{k!} \\
&= \exp\left(\lambda e^{iu} - \lambda\right) \\
&= \boxed{\exp\left[\lambda\left(e^{iu}-1\right)\right]} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Lorsqu'on dérive $\phi_X(u)$ par rapport à u, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_X(u)}{du} &= E\left[\frac{de^{iuX}}{du}\right] \\
&= E\left[iXe^{iuX}\right]
\end{aligned}$$

donc

$$\left.\frac{d\phi_X(u)}{du}\right|_{u=0} = E\left[iX\right]$$

On en déduit

$$\boxed{E\left[X\right] = \frac{1}{i} \left.\frac{d\phi_X(u)}{du}\right|_{u=0}}$$

En utilisant l'expression (1), on obtient

$$\frac{d\phi_X(u)}{du} = i\lambda e^{iu} \exp\left[\lambda\left(e^{iu}-1\right)\right]$$

d'où

$$E\left[X\right] = \frac{1}{i} \left.\frac{d\phi_X(u)}{du}\right|_{u=0} = \boxed{\lambda}$$

2)

- En faisant $u=0$ et $v=0$, on obtient

$$\begin{aligned}
E\left[e^{ivY}\right] &= \exp\left[P(0,v)\right] \\
&= \exp\left[ae^{iv} + b + ce^{iv} - (a+b+c)\right] \\
&= \exp\left[(a+c)\left(e^{iv}-1\right)\right] \\
E\left[e^{iuX}\right] &= \exp\left[P(u,0)\right] \\
&= ae^{iu} + be^{iu} + c - (a+b+c) \\
&= \exp\left[(a+b)\left(e^{iu}-1\right)\right]
\end{aligned}$$

Puisque la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X caractérise la loi de cette variable aléatoire, d'après les résultats de 1), on a

$$\boxed{X \sim \mathcal{P}(a+b)} \text{ et } \boxed{Y \sim \mathcal{P}(a+c)}$$

- On a

$$\frac{\partial^2 \psi(u,v)}{\partial u \partial v} = E\left[\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} e^{i(uX+vY)}\right] = E\left[-XYe^{i(uX+vY)}\right]$$

d'où

$$\boxed{E[XY] = -\left.\tfrac{\partial^2 \psi(u,v)}{\partial u \partial v}\right|_{u=v=0}}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \psi(u,v) &= \exp[P(u,v)] \\ &= \exp\left[ae^{i(u+v)} + be^{iu} + ce^{iv} - (a+b+c)\right] \end{aligned} \tag{2}$$

on obtient

$$\frac{\partial \psi(u,v)}{\partial v} = \exp[P(u,v)] \frac{\partial P(u,v)}{\partial v}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi(u,v)}{\partial u \partial v} &= \exp[P(u,v)] \frac{\partial P(u,v)}{\partial v} \frac{\partial P(u,v)}{\partial u} + \exp[P(u,v)] \frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u \partial v} \\ &= \exp[P(u,v)] \left[\frac{\partial P(u,v)}{\partial v} \frac{\partial P(u,v)}{\partial u} + \frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u \partial v}\right] \\ &= \exp[P(u,v)] \left[\left(aie^{i(u+v)} + ice^{iv}\right)\left(aie^{i(u+v)} + ibe^{iu}\right) - ae^{i(u+v)}\right] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} E[XY] &= -\exp[P(0,0)]\,[i(a+c)\,i(a+b) - a] \\ &= a + (a+c)(a+b) \end{aligned}$$

On en conclut

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E[XY] - E[X]\,E[Y] \\ &= a + (a+c)(a+b) - (a+c)(a+b) \\ &= \boxed{a} \end{aligned}$$

Puisque $cov(X,Y) = a \neq 0$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

3) On calcule facilement la fonction caractéristique de (X,Y) comme suit

$$\begin{aligned} E\left[e^{iuX+ivY}\right] &= E\left[e^{iuX_1+ivX_3+i(u+v)X_2}\right] \\ &= E\left[e^{iuX_1}\right] E\left[e^{ivX_3}\right] E\left[e^{i(u+v)X_2}\right] \quad (\text{car } X_1, X_2, X_3 \text{ indépendantes}) \\ &= \phi_{X_1}(u)\phi_{X_3}(v)\phi_{X_2}(u+v) \\ &= \exp\left[\lambda_1\left(e^{iu}-1\right)\right] \exp\left[\lambda_3\left(e^{iv}-1\right)\right] \exp\left[\lambda_2\left(e^{i(u+v)}-1\right)\right] \end{aligned}$$

On reconnait donc la forme (2) avec

$$P(u,v)=\lambda_1\left(e^{iu}-1\right)+\lambda_3\left(e^{iv}-1\right)+\lambda_2\left(e^{i(u+v)}-1\right)$$

Par identification, on obtient

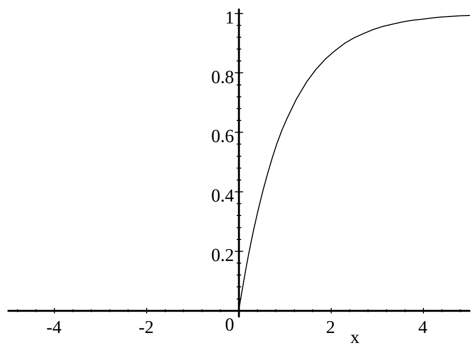
$$\boxed{a=\lambda_2, b=\lambda_1 \text{et } c=\lambda_3}$$

Exercice 2

1) La fonction de répartition de X est définie par

$$\begin{aligned} F_a(x) &= P\left[X<x\right]=\left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } x<0 \\ \int_0^x ae^{-au}du \text{ si } x>0 \end{array}\right. \\ &= \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } x<0 \\ 1-e^{-ax} \text{ si } x>0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

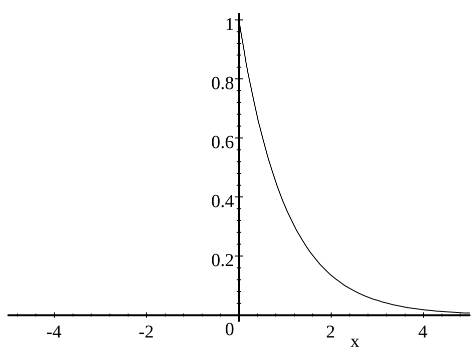
et est représentée ci-dessous pour $a=1$



En dérivant cette fonction de répartition, on obtient la densité de probabilité de X

$$f_a(x)=\left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } x<0 \\ ae^{-ax} \text{ si } x>0 \end{array}\right.$$

La densité $f_a(x)$ est représentée ci-dessous pour $a=1$:



2)La transformation $X = -\frac{1}{a}\ln U$ est bijective puisque

$$X = -\frac{1}{a}\ln U \Leftrightarrow U = e^{-aX}$$

(à une valeur de U correspond une valeur de X et vice versa). Cette transformation est clairement définie de $]0,1]$ dans $[0,+\infty[$. La densité de X s'écrit donc

$$\begin{aligned} f_a(x) &= 1 \times \left|-ae^{-axX}\right| \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x) \\ &= \boxed{ae^{-ax}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)} \end{aligned}$$

où $\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$ est la fonction indicatrice sur $[0,+\infty[$

$$\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,+\infty[\\ 0 \text{ si } x \notin [0,+\infty[\end{cases}$$

On retrouve évidemment le résultat de 1).

3) Le changement de variables proposé est bijectif puisque

$$\begin{cases} Y = -\frac{1}{a_1}\ln[U_1] - \frac{1}{a_2}\ln[U_2] \\ Z = -\frac{1}{a_1}\ln[U_1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 = e^{-a_1 Z} \\ U_2 = \exp[-a_2(Y-Z)] \end{cases}$$

Le domaine du couple (Y,Z) est tel que

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 < U_1 \leq 1 \\ 0 < U_2 \leq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < e^{-a_1 Z} \leq 1 \\ 0 < \exp[-a_2(Y-Z)] \leq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Z \geq 0 \\ -a_2(Y-Z) \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} Z \geq 0 \\ Y \geq Z \end{cases}} \end{aligned}$$

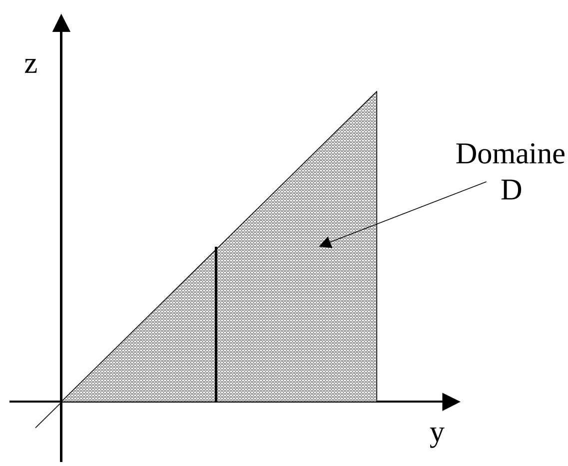
Le jacobien de la transformation est

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial Y} & \frac{\partial U_2}{\partial Y} \\ \frac{\partial U_1}{\partial Z} & \frac{\partial U_2}{\partial Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a_2 \exp[-a_2(Y-Z)] \\ -a_1 e^{-a_1 Z} & a_2 \exp[-a_2(Y-Z)] \end{vmatrix} \\ &= a_1 a_2 \exp[-a_1 Z - a_2(Y-Z)] \end{aligned}$$

La densité du couple (Y,Z) s'écrit donc

$$\boxed{f(y,z) = a_1 a_2 \exp[-a_1 z - a_2(y-z)]\,\mathbb{I}_D(y,z)}$$

où D est le domaine triangulaire défini par $y \geq z \geq 0$ représenté ci-dessous :



La loi marginale de Y est alors obtenue par intégration de $f(y,z)$:

$$f(y,.) = \int_{\mathbb{R}} f(y,z)dz = \begin{cases} 0 \text{ si } y \leq 0 \\ \int_0^y f(y,z)dz \text{ si } y > 0 \end{cases}$$

Des calculs élémentaires permettent d'obtenir pour $y > 0$

$$\begin{aligned} f(y,.) &= \int_0^y a_1 a_2 \exp\left[-a_1 z - a_2\left(y - z\right)\right] dz \\ &= a_1 a_2 \exp\left[-a_2 y\right] \left[\frac{\exp\left[\left(a_2 - a_1\right) z\right]}{\left(a_2 - a_1\right)}\right]_0^y \\ &= \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \left[e^{-a_1 y} - e^{-a_2 y}\right] \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{f(y,.) = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \left[e^{-a_1 y} - e^{-a_2 y}\right] \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y)}$$

Exercice 3

1) De manière évidente $E\left[X_i\right] = p$ et $Var\left[X_i\right] = p\left(1-p\right)$.
2) Pour $i = j$, on a

$$\boxed{E\left[X_i X_j\right] = E\left[X_i^2\right] = p}$$

Pour $|j - i| > 1$, puisque les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes, on a

$$\boxed{E\left[X_i X_j\right] = E\left[X_i\right] E\left[X_j\right] = p^2 \text{ pour } |j - i| > 1}$$

Pour $j = i + 1$, on a à cause du codage correcteur d'erreurs $X_i X_{i+1} = 0$, d'où

$$\boxed{E\left[X_i X_{i+1}\right] = 0}$$

Pour $i = j - 1$, on a de la même façon

$$\boxed{E\left[X_i X_{i-1}\right] = 0}$$

3) On a

$$\begin{aligned} E\left[\left(Y_N - p\right)^2\right] &= E\left[Y_N^2\right] - 2pE\left[Y_N\right] + p^2 \\ &= \frac{1}{N^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)^2\right] - p^2 \\ &= \frac{1}{N^2} E\left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i X_j\right] - p^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E\left[X_i X_j\right] - p^2 \end{aligned}$$

Dans la dernière somme on a

N termes avec $i = j$ qui sont égaux à p
$N - 1$ termes avec $i = j + 1$ qui sont égaux à 0
$N - 1$ termes avec $i = j - 1$ qui sont égaux à 0
$N^2 - N - 2\,(N - 1)$ termes pour $|j - i| > 1$ qui valent p^2

On en déduit

$$
\begin{aligned}
E\left[(Y_N - p)^2\right] &= \frac{1}{N^2}\left[Np + \left\{N^2 - N - 2\,(N-1)\right\}p^2\right] - p^2 \\
&= \frac{p - 3p^2}{N} + \frac{2p^2}{N^2}
\end{aligned}
$$

La variable aléatoire Y_N converge donc en moyenne quadratique vers p car

$$
\lim_{N\to\infty} E\left[(Y_N - p)^2\right] = 0
$$