Examen Mercredi 13 Novembre 2002

Exercice 1

1) On utilise les résultats concernant les changements de variables linéaires pour les vecteurs Gaussiens. En effet $(X,Y,Z)^T$ est un vecteur Gaussien de moyenne $m=(0,0,0)^T$ et de matrice de covariance la matrice identité de taille 3×3 notée $\Gamma = I_3$. De plus

$$\begin{pmatrix} U \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 2 car $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On en déduit

$$\begin{pmatrix} U \\ T \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(Am, A\Gamma A^T\right)$$

Mais $Am = (0,0)^T$ et $A\Gamma A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & a+b \\ a+b & a^2+b^2 \end{pmatrix}$, donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} U \\ T \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & a+b \\ a+b & a^2+b^2 \end{pmatrix}\right)}$$

D'après le cours relatif aux lois marginales de vecteurs Gaussiens, on en déduit

$$\boxed{U \sim \mathcal{N}(0,3)}$$
$$\boxed{T \sim \mathcal{N}(0, a^2+b^2)}$$

Puisque $(U,T)^T$ est un vecteur Gaussien, on sait que

$$U \text{ et } T \text{ indépendantes } \Leftrightarrow cov(U,T) = 0$$

$\boxed{\text{Les variables } U \text{ et } T \text{ sont donc indépendantes si et seulement si } a+b=0.}$

2) La densité de $U\,|T=t$ est définie par

$$f\left(u\,|t\right) = \frac{f(u,t)}{f(.,t)}$$

D'après l'exercice précédent et la définition de la loi normale à 2 dimensions, on a

$$f(u,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Lambda}} \exp\left(-\frac{1}{2}(u,t)\,\Lambda^{-1}\begin{pmatrix} u \\ t \end{pmatrix}\right)$$

avec $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & a+b \\ a+b & a^2+b^2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de Λ est

$$\det \Lambda = 2\left[a^2+b^2-ab\right]$$

En inversant la matrice Λ, on obtient

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{\det \Lambda}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & -(a+b) \\ -(a+b) & 3 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\boxed{f(u,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Lambda}} \exp\left(-\frac{\left(a^2+b^2\right)u^2+3t^2-2\left(a+b\right)ut}{2\det \Lambda}\right)}$$

Par ailleurs, la densité marginale de T est

$$f(.,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(a^2+b^2\right)}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\left(a^2+b^2\right)}\right)$$

En faisant le rapport de $f(u,t)$ et de $f(.,t)$, on obtient

$$\begin{aligned} f\left(u\,|t\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\det \Lambda}{a^2+b^2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(a^2+b^2\right)u^2-2\left(a+b\right)ut+3t^2}{\det \Lambda}-\frac{t^2}{a^2+b^2}\right\}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2\left[a^2+b^2-ab\right]}{a^2+b^2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(a^2+b^2\right)u^2-2\left(a+b\right)ut}{2\left[a^2+b^2-ab\right]}+\frac{\left(a+b\right)^2t^2}{2\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2-ab\right)}\right\}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2\left[a^2+b^2-ab\right]}{a^2+b^2}}} \exp\left(-\frac{\left(u-\frac{a+b}{a^2+b^2}t\right)^2}{2\frac{2\left[a^2+b^2-ab\right]}{a^2+b^2}}\right)} \end{aligned}$$

On reconnait la densité d'une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2, à savoir $f\left(u\,|t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(u-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)$(on sait d'ailleurs d'après le cours que les lois conditionelles des vecteurs Gaussiens sont Gaussiennes) , avec

$$\boxed{\mu = \frac{a+b}{a^2+b^2}t}$$
$$\boxed{\sigma^2 = \frac{2\left[a^2+b^2-ab\right]}{a^2+b^2}}$$

Pour que les variables U et T soient indépendantes, il faut et il suffit que la loi conditionnelle de $U\,|T=t$ ne dépende pas de t. On retrouve donc le résultat trouvé plus simplement à la question 1) :

$$\boxed{\text{Les variables } U \text{ et } T \text{ sont indépendantes si et seulement si } a+b=0.}$$

Exercice 2

1) Y est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{-1,+1\}$ avec

$$\begin{aligned} P[Y=1] &= P[X>a] = \boxed{1-\Phi(a)} \\ P[Y=-1] &= \boxed{\Phi(a)} \end{aligned}$$

où F est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

2) (Y,Z) est un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{(-1,-1),(-1,1),(1,1)\}$ avec

$$\begin{aligned} P[(Y,Z)=(-1,-1)] &= P[X<a \text{ et } X<-a] \\ &= P[X<-a] \\ &= \Phi(-a) = \boxed{1-\Phi(a)} \\ P[(Y,Z)=(1,1)] &= P[X>a \text{ et } X>-a] \\ &= P[X>a] \\ &= \boxed{1-\Phi(a)} \\ P[(Y,Z)=(-1,1)] &= 1-P[(Y,Z)=(-1,-1)]-P[(Y,Z)=(1,1)] \\ &= \boxed{2\Phi(a)-1} \end{aligned}$$

3) a) Les moyennes de Y et de Z se calculent aisément :

$$\begin{aligned} E[Y] &= 1[1-\Phi(a)]+(-1)\Phi(a) = \boxed{1-2\Phi(a)} \\ E[Z] &= 1-2\Phi(-a) = 1-2[1-\Phi(a)] = \boxed{2\Phi(a)-1} \end{aligned}$$

En remarquant que $Y^2=Z^2=1$ (puisque ce sont des signes), les variances de Y et de Z vérifient :

$$\begin{aligned} \text{var}[Y] &= E\left[Y^2\right]-E[Y]^2 \\ &= 1-[1-2\Phi(a)]^2 \\ &= \boxed{4\Phi(a)[1-\Phi(a)]} \\ \text{var}[Z] &= \boxed{4\Phi(a)[1-\Phi(a)]} \end{aligned}$$

A l'aide de la loi du couple (Y,Z), on peut calculer $E[YZ]$ comme suit :

$$\begin{aligned} E[YZ] &= \sum_{i,j} y_i z_j P[Y=y_i, Z=z_j] \\ &= 1[1-\Phi(a)+1-\Phi(a)]+(-1)[2\Phi(a)-1] \\ &= 3-4\Phi(a) \end{aligned}$$

La covariance du couple est donc

$$\begin{aligned} cov(Y,Z) &= E[YZ]-E[Y]E[Z] \\ &= 3-4\Phi(a)+[2\Phi(a)-1]^2 \\ &= \boxed{4[\Phi(a)-1]^2} \end{aligned}$$

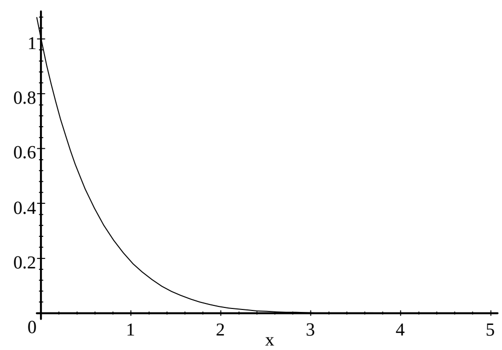
Le coefficient de corrélation s'exprime alors ainsi

$$\begin{aligned}\rho(a) &= \frac{cov(Y,Z)}{\sqrt{\operatorname{var}[Y]\operatorname{var}[Z]}} \\ &= \boxed{\frac{1}{\Phi(a)} - 1}\end{aligned}$$

b) Pour $a = 1$, on a d'après la table $\Phi(a) = \Phi(1) \simeq 0.8413$ d'où

$$\rho(1) \simeq 0.19$$

c) On voit que ρ est une fonction décroissante de $\Phi(a)$, donc de a. On peut alors tracer la courbe $\rho(a)$:



Interprétation : plus a augmente, moins les variables aléatoires Y et Z sont corrèlées ("liées").

Exercice 3

1) Les conditions nécessaires et suffisantes pour que $f(x,y)$ soit une densité de probabilité sont

$$\begin{gathered}\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1 \\ f(x,y) \geq 0 \qquad \forall x, \forall y\end{gathered}$$

La première condition s'écrit :

$$\begin{aligned}1 &= \int\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} - \lambda(x)\lambda(y)\right]dxdy \\ &= 1 - \int\int_{\mathbb{R}^2}\lambda(x)\lambda(y)\,dxdy\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}}\lambda(x)\,dx = 0}$$

La deuxième condition s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} - \lambda(x)\lambda(y) \geq 0 \qquad \forall x, \forall y$$

Pour que cette condition soit vérifiée il suffit de choisir $\lambda(x)$ tel que

$$|\lambda(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \forall x$$

On peut donc choisir

$$\boxed{\beta(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

2) On pose $\lambda(x) = a\cos(x)\, \mathbb{I}_{[-\pi,+\pi]}(x)$. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(x)\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} a\cos(x)\, dx = 0$$

donc la première condition de 1) est vérifiée. Pour que la deuxième condition

$$|\lambda(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}} \qquad \forall x$$

soit vérifiée, il suffit que le maximum de $|\lambda(x)|$ $,x \in [-\pi,+\pi]$ soit inférieur au minimum de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}}$ $,x \in [-\pi,+\pi]$ c'est-à-dire

$$\boxed{a \leq \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\pi^2}{2}}}$$

3) Les lois marginales du couple (X,Y) sont définies par :

$$\begin{aligned} f(x,.) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \\ f(.,y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f(x,.) &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} - \lambda(x)\lambda(y) \right] dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \lambda(x) \int_{\mathbb{R}} \lambda(y)\, dy \end{aligned}$$

Puisque $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} \lambda(y)\, dy = 0$, on obtient

$$\boxed{f(x,.) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

De même

$$\boxed{f(.,y) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}}$$

Les lois marginales du couple (X,Y) sont donc des lois normales $\mathcal{N}(0,1)$.

4) La covariance du couple (X,Y) est définie par

$$cov(X,Y) = E[XY] - E[X]\, E[Y]$$

Puisque $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a $E[X] = E[Y] = 0$, d'où

$$\begin{aligned}
cov(X,Y) &= E[XY] \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)dxdy \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^2} xy \left[\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} - \lambda(x)\lambda(y)\right] dxdy \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right]\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right] - \left[\int_{\mathbb{R}} x\lambda(x)\,dx\right]\left[\int_{\mathbb{R}} y\lambda(y)\,dy\right]
\end{aligned}$$

Pour que la covariance du couple soit nulle, il suffit d'avoir

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} x\lambda(x)\,dx = 0}$$

Cette condition est vérifiée pour toute fonction $\lambda(x)$ paire (car $x\lambda(x)$ est alors impaire) et donc en particulier pour $\lambda(x) = a\cos(x)\,\mathbb{I}_{[-\pi,+\pi]}(x)$.

5) On a

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} - \lambda(x)\lambda(y)$$

et

$$f(x,.)f(.,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Il n'y a égalité entre $f(x,y)$ et $f(x,.)f(.,y)$ que lorsque la fonction $\lambda(x)$ est identiquement nulle. Les variables aléatoires X et Y ne sont donc en général pas indépendantes. Cet exercice permet de construire des vecteurs aléatoires non Gaussiens pour lequel les lois marginales sont Gaussiennes. De plus, ces vecteurs sont constitués de variables aléatoires dépendantes (non indépendantes) tels que $cov(X,Y) = 0$.