Examen Vendredi 17 Novembre 2000

**Exercice 1**

1.1) Après avoir remarqué que $y_1 = x_1^2$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et de $\mathbb{R}^-$ dans $\mathbb{R}^+$, on étudie les deux bijections et on ajoute les contributions de chaque morceau pour avoir le résultat voulu.

1.2) La densité du couple $(Y_n, X_{n+1})$ est

$$f(y_n, x_{n+1}) = g_n(y_n) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x_{n+1}^2}{2} \qquad x_{n+1} \in \mathbb{R}, y_n \in \mathbb{R}^+$$

Le changement de variables proposé est bijectif de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ dans l'ensemble $\Delta = \{(u,v) \,| u \geq v^2\}$ qui est la partie supérieure de la parabole $u = v^2$. Le jacobien est égal à 1 et donc la densité du couple est

$$h(u,v) = g_n\left(u - v^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{v^2}{2} \qquad (u,v) \in \Delta$$

1.3) La loi de $U$ s'obtient par intégration de $h(u,v)$ :

$$h(u,.) = \int_{\mathbb{R}} h(u,v)\, dv = 2 \int_0^{\sqrt{u}} h(u,v) dv$$

Le changement de variables $v = \sqrt{u} \cos\theta$ permet d'obtenir le résultat attendu.

2.1) un changement de variable élémentaire permet d'obtenir $Z \sim \Gamma\left(1, \frac{1}{2}\right)$ et donc sa fonction caractéristique est

$$E\left[e^{itZ}\right] = \frac{1}{(1-it)^{1/2}}$$

2.2) En utilisant l'indépendance des variables aléatoires $X_i, i = 1, ..., n$, on obtient

$$E\left[e^{itZ_n}\right] = \frac{1}{(1-it)^{n/2}}$$

Les tables nous indiquent alors $Z_n \sim \Gamma\left(1, \frac{n}{2}\right)$. Un changement de variables élémentaire donne alors la loi de $Y_n$.

**Exercice 2**

1) **Fortune illimitée**

- Lorsque "pile" sort au premier jet de pièce on a $G = 1$ et la probabilité correspondante est $\frac{1}{2}$.
- Lorsque "pile" sort au deuxième jet de pièce on a la séquence "pile,face". Le gain de $A$ est alors $G = 4 - (1+2) = 1$ et la probabilité correspondante est $\frac{1}{2^2}$.

- Lorsque "pile" sort au troisième jet de pièce on a la séquence "pile,pile,face". Le gain de $A$ est alors $G = 8 - (1 + 2 + 4) = 1$ et la probabilité correspondante est $\frac{1}{2^3}$.

- etc ...

- Lorsque "pile" sort au $i^{ème}$ jet de pièce, le gain de $A$ est alors $G = 2^i - (1 + 2 + ... + 2^{i-1}) = 1$ et la probabilité correspondante est $\frac{1}{2^i}$.

On s'aperçoit donc que le gain de $A$ est toujours $G = 1$ et donc $E[G] = 1$ et $Var(G) = 0$. Le joueur $A$ a donc un gain moyen de 1 franc. La stratégie de la martingale est donc intéressante mais $A$ doit être très riche !

2) **Fortune limitée**

Lorsque la fortune de $A$ est limitée, la loi du gain de $A$ est

- séquence "pile" $\quad G = 1$ avec probabilité $\frac{1}{2}$

- séquence "face,pile" $\quad G = 1$ avec probabilité $\frac{1}{2^2}$

- ...

- séquence "$i - 1$ faces puis pile" $\quad G = 1$ avec probabilité $\frac{1}{2^i}$

- ...

- séquence "$K - 1$ faces puis pile" $\quad G = 1$ avec probabilité $\frac{1}{2^K}$

- séquence "$K$ faces" $\quad G = -\left(1 + 2 + ... + 2^{K-1}\right) = -\frac{1-2^K}{1-2} = 1 - 2^K$ avec probabilité $1 - \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^K}$

Le gain moyen de $A$ est donc

$$E[G] = 1 \times \frac{1}{2} + ... + 1 \times \frac{1}{2^K} + \left(1 - 2^K\right)\frac{1}{2^K} = 0$$

La stratégie de la martingale perd tout intérêt lorsque la fortune de $A$ est limitée puisque le gain moyen est nul. Cependant, pour une grande fortune la probabilité de perdre $\frac{1}{2^K}$ est faible et donc le joueur $A$ gagne souvent. Ceci explique pourquoi la martingale est interdite dans les casinos.

3) $\frac{G_i - \left(1-2^K\right)}{2^K}$ suit une loi de Bernoulli avec probabilité de succès

$$p_s = P\left[\frac{G_i - \left(1 - 2^K\right)}{2^K} = 1\right] = 1 - \frac{1}{2^K}$$

donc $\sum_{i=1}^{N} \frac{G_i - \left(1-2^K\right)}{2^K} = \frac{1}{2^K}G - N\frac{\left(1-2^K\right)}{2^K}$ suit une loi binomiale $B(N, p_s)$. D'où la loi de $G$ :

$$P\left[G = 2^K i + N\left(1 - 2^K\right)\right] = C_N^i p_s^i \left(1 - p_s\right)^{N-i} \qquad i = 0, ..., N$$

**Exercice 3**

1)

- Pour $a = 0$, on a $Y_a = 0$
- Pour $a \neq 0$, le vecteur $(a, ..., a)$ est de rang 1 donc $Y_a \sim \mathcal{N}\left(E\left[Y_a\right], VarY_a\right)$ i.e.

$$Y_a \sim \mathcal{N}\left({}^t am, {}^t a\Sigma a\right)$$

2) On a $\phi_X(u) = E\left[e^{iY_u}\right]$ qui est la fonction caractéristique de $Y_u$ au point 1, d'où

$$\phi_X(u) = \exp\left(im_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right)$$

En exprimant $m_u$ et $\sigma_u^2$ en fonction de $m, \Sigma$ et $u$, on obtient

$$\phi_X(u) = \exp\left(i^t um - \frac{1}{2}\ {}^t u\Sigma u\right)$$

3) L'expression précédente de $\phi_X(u)$ est la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(m, \Sigma)$ donc si $Y_u$ suit une loi normale pour tout $u \neq 0$, la fonction caractéristique de $X$ est celle de la loi normale $\mathcal{N}(m, \Sigma)$ donc $X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$. La réciproque est vérifiée au 1a).